

**Промысловые виды и их биология**

УДК 597.553.1 (262.5)

**Составление уравнения роста Берталанфи с использованием прикладных компьютерных программ для черноморского шпрота и хамсы***Е.Б. Мельникова*

Институт природно-технических систем (ФГБНУ «ИПТС»), г. Севастополь

E-mail: helena\_melnikova@mail.ru

Предложена методика составления уравнения линейного роста Берталанфи, основанная на использовании функции регрессии экспериментальных данных нарастающей экспонентой, имеющейся в прикладных компьютерных программах. Разработанная методика характеризуется простотой практического применения и может быть использована при отсутствии регулярных наблюдений. По разработанной методике для черноморского шпрота и хамсы, обитающих на западном шельфе Крыма, составлены уравнения линейного роста Берталанфи и оценены погрешности определения параметров уравнения, обусловленные погрешностью измерения длины рыб. Определены области применения составленных уравнений. Приведены усреднённые кривые роста черноморского шпрота и хамсы, а также на графиках отмечены пределы, в которых с вероятностью 95% находятся отклонения длины особей, обусловленные сезонными и индивидуальными особенностями биологического развития. На основе полученных уравнений роста рассчитан среднемесячный прирост длины шпрота и хамсы для разных возрастных групп. Полученные результаты могут быть использованы в ихтиологических исследованиях, а также в рыбопромысловой отрасли при расчете темпов роста рыб промысловых стад и расчете продукционных характеристик

**Ключевые слова:** уравнение Берталанфи, черноморский шпрот, хамса, Чёрное море, погрешность определения коэффициентов уравнения.

**ВВЕДЕНИЕ**

Рост является интегрированным ответом живых организмов на воздействие факторов среды обитания. При этом темпы и характер роста могут изменяться при климатических изменениях или антропогенных воздействиях. В связи с этим изучение темпов роста рыб в естественных условиях и составление уравнений роста особей промыслового стада [Вин-

берг, 1971; Рикер, 1979; Мельникова, 2010] является необходимым для рационального использования рыбных ресурсов и широко используется в рыбохозяйственной отрасли при прогнозировании объёмов вылова.

Для оценки количественной характеристики индивидуального и внутривидового роста рыб промысловых размеров широко используют уравнение линейного роста Берталанфи

[Bertalanffy, 1964; Allen, 1966; Винберг, 1966, 1971; Бивертон, Холт, 1969; Рикер, 1979].

Уравнение линейного роста Берталанфи имеет вид:

$$l(t) = L \left[ 1 - e^{-K(t-t_0)} \right], \text{ при } t > t_{\min}, \quad (1)$$

где:  $l(t)$  — длина рыбы в возрасте  $t$ , см;  $L$  — средняя предельная (теоретическая) длина рыбы, см;  $K$  — коэффициент, характеризующий скорость роста;  $t_0$  — коэффициент, характеризующий теоретический возраст, при котором длина рыбы равна нулю;  $t_{\min}$  — минимальный возраст, для которого применимо уравнение (1);  $t$  — возраст рыбы, год [Quinn, Deriso, 1999].

Следует отметить, что уравнение линейного роста Берталанфи применимо только для рыб промысловых размеров [Bertalanffy, 1964; Бивертон, Холт, 1969] и не предназначено для расчёта длины мальков после выклева личинок. Поэтому расчёты по уравнению (1) можно проводить только для особей начиная с некоторого минимального возраста  $t_{\min}$ , при котором они достигают промысловых размеров.

В уравнении (1) содержится три неизвестных коэффициента  $L$ ,  $K$  и  $t_0$ , которые должны быть определены на основе экспериментальных измерений.

Существуют разные методы нахождения этих коэффициентов.

В ряде методов [Бивертон, Холт, 1969] для нахождения неизвестных коэффициентов необходимо знание длины рыбы через равные интервалы времени. Другие методы могут быть использованы при отсутствии регулярных измерений, т. е. применимы в тех случаях, когда измерительные интервалы не равны друг другу [Мельникова, 2008 б].

Недостатком всех этих методов является использование трудоёмкого графоаналитического метода, требующего значительных затрат времени, что несколько ограничивает (затрудняет) широкое использование уравнения линейного роста Берталанфи в рыбопромысловой отрасли.

В последние годы наблюдается расширение функциональных возможностей прикладных компьютерных программ, в частности, увеличение числа функций, используемых при регрессионном анализе. Это может значительно

упростить процедуру составления уравнения роста Берталанфи.

Целью работы является разработка методики составления уравнения линейного роста Берталанфи с использованием прикладных компьютерных программ, а также составление по разработанной методике уравнений роста черноморского шпрота и хамсы, обитающих на западном шельфе Крыма.

## МАТЕРИАЛ И МЕТОДИКА

Материалом для составления уравнений линейного роста черноморского шпрота *Sprattus sprattus phalericus* Risso, 1826 (Pisces: Clupeidae) и европейского анчоуса (хамса) *Engraulis encrasicolus* (L., 1758) послужили данные, полученные в 2009–2011 гг. из траловых уловов промысловых судов с юго-западного шельфа Крыма (от мыса Херсонес до мыса Лукулл). Из тралового улова отбиралась случайным образом проба в количестве от 90 до 100 экз., которая полностью отражает размерно-возрастную структуру промыслового стада. За исследуемый период было обработано более 50 проб. При биологическом анализе длину тела рыбы определяли с точностью до 0,1 см. Возраст определяли по отолитам.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В ряде пакетов прикладных компьютерных программ, например, *Statistica 6.0*, *SigmaPlot 12.5* и др., имеется встроенная функция регрессии экспериментальных данных нарастающей экспонентой (Exponential Rise to Maximum). Регрессия осуществляется функцией вида:

$$f(x) = y_0 + a(1 - \exp(-bx)). \quad (2)$$

В результате выполнения регрессионного анализа программа выдает три константы:  $y_0$ ,  $a$  и  $b$ , а также ряд параметров, характеризующих качество выполнения регрессии (в частности,  $R^2$  — квадрат коэффициента множественной корреляции). В процессе регрессионного анализа могут быть найдены также интервалы, в которых разбросы параметров находятся в пределах найденной функции (см. выражение (2)) с заданной вероятностью (например, 68% или 95% и др.).

Сравнение уравнений (1) и (2) позволяет найти коэффициенты уравнения линейного ро-

ста Берталанфи на основе найденных в процессе регрессионного анализа констант:

$$L = y_0 + a, \quad (3)$$

$$K = b, \quad (4)$$

$$t_0 = \frac{1}{b} \ln \frac{a}{L}, \quad (5)$$

где  $L$ ,  $K$ ,  $t_0$  — коэффициенты уравнения Берталанфи;  $y_0$ ,  $a$ ,  $b$  — коэффициенты, найденные в результате проведённого регрессионного анализа.

Для составления уравнения Берталанфи с применением регрессионного анализа, имеющегося в указанных пакетах прикладных компьютерных программ, необходимы значения «возраст-длина» (не менее чем для трёх возрастных групп) и нет требований равенства измерительных интервалов.

Если составление уравнения Берталанфи производится по средним значениям длины рыб для трёх возрастных групп, то квадрат коэффициента множественной корреляции равен единице ( $R^2 = 1$ ), т. е. найденное уравнение в точности проходит через использованные в регрессионном анализе экспериментальные точки. Однако в этом случае возрастает влияние случайных отклонений экспериментальных данных на погрешность определения параметров уравнения Берталанфи и, соответственно, возрастает погрешность определения важных в рыбопромысловой отрасли параметров скорости роста особей промыслового стада (параметр  $K$ ) и средней предельной длины рыбы (параметр  $L$ ).

Анализ показывает, что увеличение погрешности определения длины или возраста особи при исследовании младших возрастных групп увеличивает погрешность определения параметров уравнения Берталанфи  $t_0$  и  $K$ , а при исследовании старших возрастных групп — погрешность определения параметров  $K$  и  $L$ .

На основе использования регрессионного анализа по разработанной методике были найдены коэффициенты уравнения линейного роста Берталанфи для черноморского шпрота и хамсы промысловых размеров, обитающих на шельфе Западного Крыма.

При составлении уравнения роста черноморского шпрота использовали следу-

ющие усреднённые по длине рыб данные: сеголетки —  $l(0,5) = 5,75 \pm 0,07$  см, годовики —  $l(1) = 6,8 \pm 0,05$  см, двухгодовики —  $l(2) = 8,1 \pm 0,06$  см, трёхгодовики —  $l(3) = 9,2 \pm 0,15$  см.

В результате регрессионного анализа были получены следующие коэффициенты уравнения (2):

$$y_0 = 4,667;$$

$$a = 6,879; \quad (6)$$

$$b = 0,355.$$

Квадрат коэффициента множественной корреляции:  $R^2 = 0,985$ .

Подставив найденные коэффициенты (6) в соотношения (3, ..., 5), затем в уравнение (1), получили следующее уравнение линейного роста черноморского шпрота, применимое для расчёта особей промысловых размеров:

$$l(t) = 11,54 \left[ 1 - e^{-0,355(t+1,45)} \right], \text{ при } t > 0,5, \quad (7)$$

где  $t = 0,5$  — минимальный возраст черноморского шпрота, при котором он достигает промысловых размеров.

Рассчитанная усреднённая кривая роста черноморского шпрота изображена на рис. 1а.

Видно, что рост шпрота, встречающегося в уловах промысловых судов, в соответствии с уравнением Берталанфи, происходит по нарастающей экспоненте, стремящейся к средней предельной длине особей исследуемого стада, равной 11,5 см, которая отмечена на графике пунктирной линией. На рис. 1а изображены также пределы, в которых длина рыб исследуемого возраста с учётом сезонных отклонений в развитии, находится с вероятностью 95%.

Выше было отмечено, что погрешность измерения длины особей черноморского шпрота составляет 0,1 см. Анализ показал, что это приводит к погрешности определения параметров уравнения Берталанфи, не превышающей следующих предельных значений:

$$\Delta L \leq 6\%;$$

$$\Delta K \leq 17\%; \quad (8)$$

$$\Delta t_0 \leq 18\%.$$

При составлении уравнения роста хамсы использовали следующие усреднённые данные по длине рыб: сеголетки —

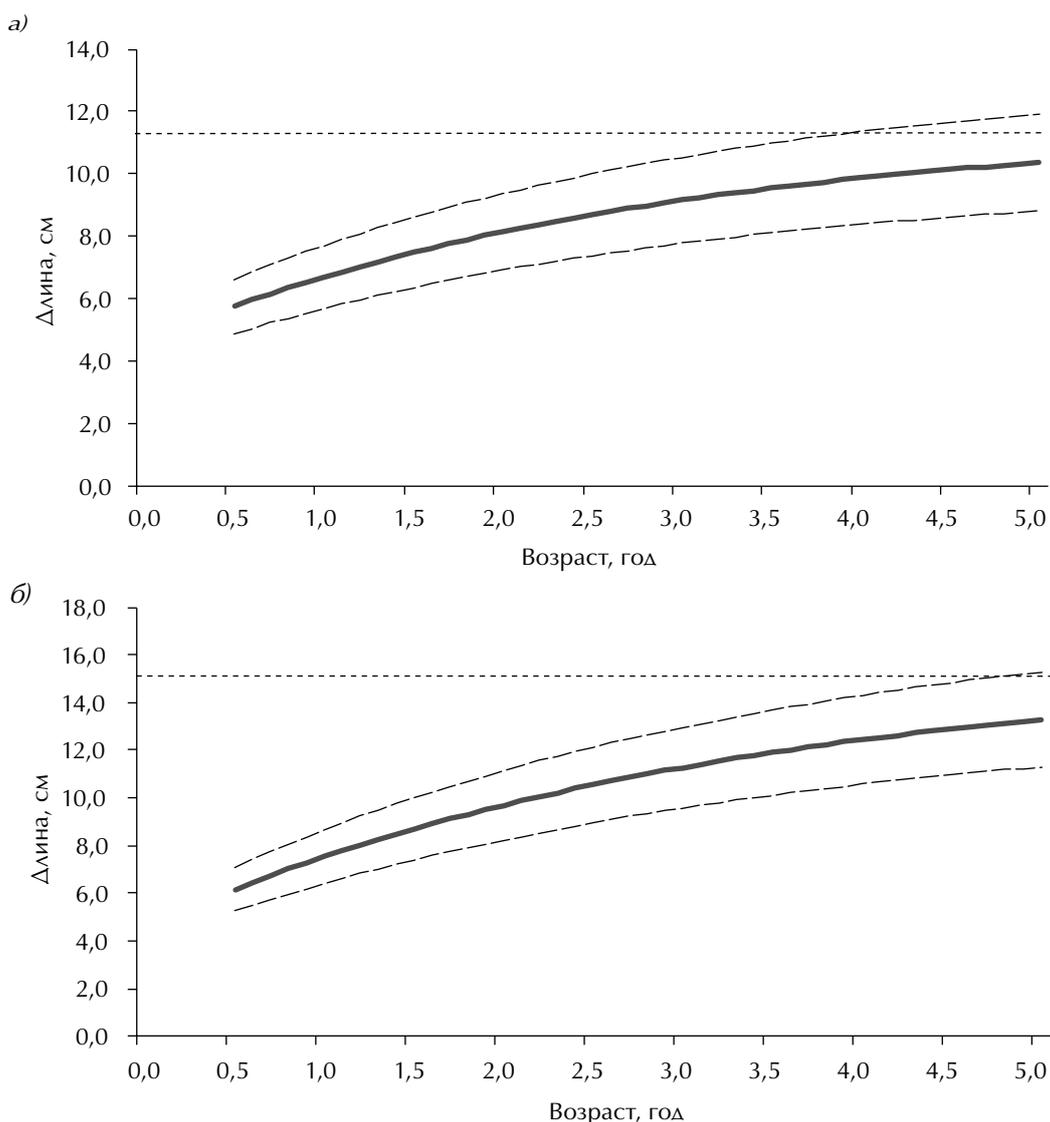


Рис. 1. Кривые роста черноморского шпрота (а) и хамсы (б), обитающих на западном шельфе Крыма

$l(0,5) = 6,17 \pm 0,08$  см, двухлетки —  $l(1,5) = 8,66 \pm 0,06$  см, трёхлетки —  $l(2,5) = 10,56 \pm 0,05$  см, четырёхлетки —  $l(3,5) = 11,88 \pm 0,13$  см.

В результате применения к экспериментальным данным регрессионного анализа были получены следующие коэффициенты уравнения нарастающей экспоненты (2):

$$\begin{aligned} y_0 &= 4,582; \\ a &= 11,069; \\ b &= 0,3085. \end{aligned} \quad (9)$$

Квадрат коэффициента множественной корреляции  $R^2 = 0,995$ .

С учётом найденных параметров (9), получили следующее уравнение линейного роста хамсы, применимое для расчёта особей промысловых размеров:

$$l(t) = 15,65[1 - e^{-0,309(t+1,123)}], \text{ при } t \geq 0,5, \quad (10)$$

где  $t = 0,5$  — минимальный возраст хамсы, при котором она достигает промысловых размеров.

На рис. 1б изображены рассчитанная усреднённая кривая роста хамсы, а также пределы, в которых длина рыб исследуемого возраста с учётом сезонных отклонений в развитии находится с вероятностью 95%.

Рост хамсы (как и шпрота), после достижения промысловой длины происходит по нарастающей экспоненте, стремящейся к средней предельной длине равной 15,65 см, которая отмечена на графике пунктирной линией.

Анализ показал, что с учётом погрешности измерения длины рыб, погрешность определения параметров уравнения Берталанфи для хамсы не превышает следующих предельных значений:

$$\begin{aligned} DL &\leq 6\%; \\ DK &\leq 16\%; \\ Dt_0 &\leq 14\%. \end{aligned} \quad (11)$$

Следует отметить, что уравнение роста Берталанфи позволяет определить усреднённый среднегодовой рост особей промыслового стада. Оно не учитывает особенности биологического развития рыб в период нагула и размножения, приводящих к изменению скорости роста в эти периоды [Данилевский, Майорова, 1979]. Это приводит к колебаниям реальной скорости роста относительно рассчитанных по уравнению Берталанфи усреднённых кривых, изображённых на рис. 1 сплошной линией, однако сезонные колебания реальной скорости роста укладываются с вероятностью 95% в пределы, отмеченные на рис. 1 пунктирной линией.

В различные сезоны года изменяются также и параметры зависимости «вес-длина», об-

условленные сезонными особенностями биологического развития [Мельникова, 2008 а]. Тем не менее, уравнение роста Берталанфи широко используется в рыбопромысловой отрасли для количественной оценки усреднённого среднегодового индивидуального и популяционного роста с целью оценки прироста промысловых запасов.

На рис. 1 возраст рыб (шпрота и хамсы) отсчитывается от момента рождения рыбы. Однако если сравнивать размеры шпрота и хамсы в какой-либо реальный один и тот же момент времени, то необходимо учитывать, что нерест шпрота и массовый выклев личинок происходят зимой, а хамсы — летом, т. е. рождение шпрота и хамсы и, соответственно, начало отсчёта возраста происходит со сдвигом на полгода.

На основе полученных уравнений роста был рассчитан усреднённый среднемесячный прирост длины шпрота и хамсы, обитающих на западном шельфе Крыма (рис. 2).

На рис. 2 изображены зависимости усреднённого среднемесячного прироста длины особей хамсы и шпрота в зависимости от возраста. Видно, что сеголетки (возраст 0,5 года) характеризуются наибольшими среднемесячными приростами длины. Для особей шпрота он составляет 1,7 мм/мес., а для хамсы в возрасте 0,5 года — 2,7 мм/мес. Далее рост рыбы

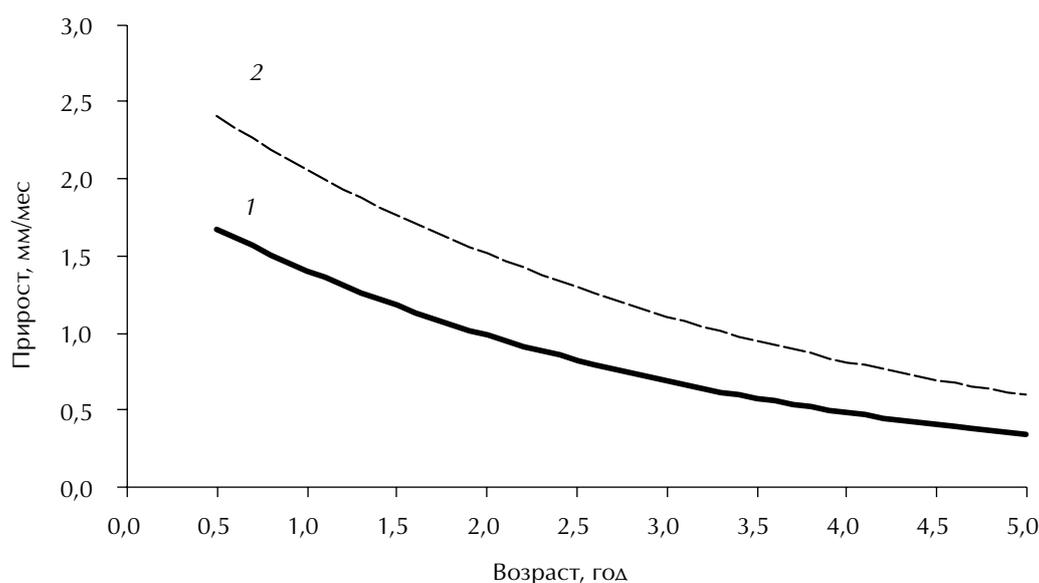


Рис. 2. Линейный усреднённый ежемесячный прирост особей черноморского шпрота (1) и хамсы (2)

замедляется. При достижении возраста 5 лет усреднённый прирост особей шпрота уменьшается в 5 раз и составляет 0,34 мм/мес, а усреднённый прирост хамсы уменьшается в 4 раза и составляет 0,61 мм/мес.

Полученные результаты могут быть использованы в ихтиологических исследованиях, а также в рыбопромысловой отрасли при расчёте темпов роста рыб промысловых стад и расчёте продукционных характеристик.

### Выводы

1. Предложена методика составления уравнения линейного роста Берталанфи с использованием прикладных компьютерных программ.

2. Найдены уравнения линейного роста черноморского шпрота и хамсы, обитающих на западном шельфе Крыма, а также рассчитан усреднённый прирост длины особей шпрота и хамсы для разных возрастных групп.

3. Оценены погрешности определения параметров уравнения линейного роста Берталанфи, обусловленных погрешностью измерения длины рыб.

### ЛИТЕРАТУРА

- Бивертон Р., Холт С. 1969. Динамика численности промысловых рыб. М.: Пищ. пром-сть. 248 с.
- Винберг Г.Г. 1966. Скорость роста и интенсивность обмена у животных // Успехи современной биологии. Т. 61. Вып. 2. С. 274–293.
- Винберг Г.Г. 1971. Линейные размеры и масса тела животных // Журн. общей биологии. Т. XXXII. № 6. С. 714–723.
- Данилевский Н.Н., Майорова А.А. 1979. Анчоус *Engraulis encrasicolus ponticus* Alex. // Сырьевые ресурсы Черного моря. М.: Пищ. пром-сть. С. 25–73.
- Мельникова Е.Б. 2008 а. О связи коэффициентов соотношения вес-длина с биологическими показателями черноморского шпрот // Современные проблемы экологии Азово-Черноморского региона. Материалы III Междунар. конф. Керчь. С. 24–29.
- Мельникова Е.Б. 2008 б. Методика определения коэффициентов уравнения роста Берталанфи при неравных измерительных интервалах // Риб. госп-во України. № 1 (54). С. 25–26.
- Мельникова Е.Б. 2010. Индивидуальные рост и продукционные характеристики черноморского шпрота // Водні біоресурси і аквакультура / За редакцією І.І. Грициняка, М.В. Гринжевського, О.М. Третьяка. К.: ДІА. С. 90–92.
- Рикер У.Е. 1979. Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб. М.: Пищ. пром-сть. 408 с.
- Allen K.R. 1966. A Method of Fitting Growth of the von Bertalanffy Type to Observed Data // Journal of the Fisheries Research Board of Canada. Vol. 23. № 23. P. 163–179.
- Bertalanffy L. 1964. Basic concepts in quantitative biology of metabolism // Helgoländer Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Vol. 9. № 1–4. P. 5–37.
- Quinn, T.J. II and Deriso R.B. 1999. Quantitative fish dynamics. Oxford University Press, New York. 542 p.

Поступила в редакцию 27.07.2017 г.  
Принята после рецензии 14.08.2017 г.

Commercial species and their biology

**Calculation the von Bertalanffy growth equations, based on the use of the applied computer programs for the Black Sea sprat and anchovy**

*E.B. Mel'nikova*

Institute of Natural and Technical Systems (FSBSI «INTS»), Sevastopol

The method of compose the von Bertalanffy growth equation, based on the use of the regression of experimental data by an function of exponential rise to maximum, available in applied computer programs is proposed. The developed method of simplicity of practical application is characterized and can be used in the absence of regular observations. For the Black Sea sprat and anchovy, living on the western shelf of the Crimea, the equations of growth in length of von Bertalanffy has been compiled according to the developed method, and also the errors in determining the parameters of the equation due to the errors in measuring the length of fish have been estimated. The age of the fish for which the developed equations are applicable is defined. The averaged curves for the growth of the Black Sea sprat and anchovy are given, and also the limits in which the deviations in the length of individuals due to seasonal and individual characteristics of biological development are found with a probability of 95%. On the basis of the obtained growth equations, the average monthly increase in the length of sprat and anchovy for different age groups is calculated. The obtained results can be used in ichthyological studies, as well as in the fishing industry in calculating the growth rates of commercial fish stocks and calculating production characteristics.

**Keywords:** the von Bertalanffy equations, Black Sea sprat, anchovy, Black Sea, the error in determining the coefficients of equation.

**REFERENCES**

- Vinberg G.G.* 1966. Skorost' rosta i intensivnost' obmena u zivotnyh [Growth rate and intensity of metabolism in animals] // *Uspekhi sovremennoj biologii*. T. 61. Vyp. 2. S. 274–293.
- Vinberg G.G.* 1971. Linejnye razmery i massa tela zivotnyh [Linear dimensions and body weight of animals] // *Zhurn. obshchej biologii*. T. XXXII. № 6. S. 714–723.
- Danilevskij N.N., Majorova A.A.* 1979. Anchous *Engraulis encrasicolus ponticus* Alex. // *Syr'evye resursy Chernogo morya*. M.: Pishch. prom-st'. S. 25–73.
- Mel'nikova E.B.* 2008 a. O svyazi koehfficientov sootnosheniya ves-dlina s biologicheskimi pokazatelyami chernomorskogo shprot // *Sovremennye problemy ehkologii Azovo-Chernomorskogo regiona*. Materialy III Mezhdunar. konf. Kerch'. S. 24–29.
- Mel'nikova E.B.* 2008 b. Metodika opredeleniya koehfficientov uravneniya rosta Bertalanfi pri neravnyh izmeritel'nyh intervalah [Method for determining the coefficients of the Bertalanffy growth equation for unequal measuring intervals] // *Rib. gosp-vo Ukraini*. № 1 (54). S. 25–26.
- Mel'nikova E.B.* 2010. Individual'nyj rost i produkcionnye harakteristiki chernomorskogo shprota [Individual growth and production characteristics of the Black Sea sprat] // *Vodni bioresursi i akvakul'tura / Za redakcieyu I.I. Gricinyaka, M.V. Grinzhevs'kogo, O.M. Tretyaka*. K.: DIA. S. 90–92.
- Allen K.R.* 1966. A Method of Fitting Growth of the von Bertalanffy Type to Observed Data // *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*. Vol. 23. № 23. P. 163–179.

- Bertalanffy L.* 1964. Basic concepts in quantitative biology of metabolism // Helgoländer Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Vol. 9. № 1–4. P. 5–37.
- Biverton R., Holt S.* 1969. Dinamika chislennosti promyslovykh ryb [On the Dynamics of Exploited Fish Populations]. M.: Pishch. prom-st'. 248 s.
- Quinn, T.J. II, R.B. Deriso.* 1999. Quantitative fish dynamics. Oxford University Press, New York. 542 p.
- Ricker W.E.* 1975. Metody otsenki i interpretatsii biologicheskikh pokazatelej populyatsij ryb [Computation and Interpretation of Biological Statistics of Fish Populations]. M.: Pishch. prom-st'. 408 s.

#### FIGURE CAPTIONS

**Fig. 1.** Curves of growth in length of the sprat (1) and anchovy (2) from the western shelf of the Crimea

**Fig. 2.** Average monthly increase in the length sprat (1) and anchovy (2)